

§2. CỰC TRỊ HÀM SỐ

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in \mathcal{D}$.

a) x_0 được gọi là một **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a;b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .

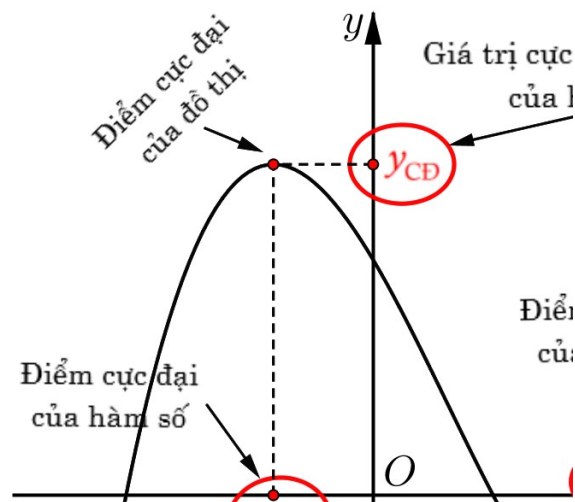
b) x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho $(a;b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) > f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a;b) \setminus \{x_0\}.$$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .

Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**.

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.



CHÚ Ý

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f(x_0)$ của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp $\mathcal{D}$; $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $(a;b)$ nào đó chứa điểm x_0 .
- Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và điểm có tọa độ $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số f** .
- Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

II. Điều kiện để hàm số đạt cực trị

ĐỊNH LÝ 1: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

- a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	x	$x_0 - h$
$f'(x)$	+		-	$f'(x)$	
$f(x)$		$f(x_0)$		$f(x)$	

III. Quy tắc tìm cực trị

QUY TẮC 1

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.
2. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.
3. Lập bảng biến thiên
4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị

ĐỊNH LÝ 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

- a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .
b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

QUY TẮC 2

1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$.
2. Tìm các nghiệm x_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) của phương trình $f'(x) = 0$.
3. Tìm $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

BÀI TẬP

DẠNG 1_TÌM CỰC TRỊ KHI BIẾT BBT, BẢNG DẤU CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$.

PHƯƠNG PHÁP

- ♦ Qua x_0 , $f'(x)$ đổi dấu từ $(+) \rightarrow (-)$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- ♦ Qua x_0 , $f'(x)$ đổi dấu từ $(-) \rightarrow (+)$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

- A.** $y_{CD} = 5$. **B.** . **C.** $x_{CD} = 5$. **D.** $x_{CT} = 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y_{CD} = y(1) = 5$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- A.** $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

Qua bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3
$f'(x)$		0	0	0

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1; x = 4$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $+\infty$ -2 $-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại:

A. $x = 5$.

B. $x = 3$.

C. $x = -2$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Qua bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		3		0		$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 $-\infty$ 3 0 $+\infty$

A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$.

C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$.

D. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				1		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $+\infty$ -3 1 $-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = -3$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $+\infty$ -2 2 $-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x = 5$.

B. $x = 3$.

C. $x = -2$.

D. $x = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $+\infty$ 1 5 $-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Giá trị cực tiểu của hàm số là

- A. $x = 3$. B. $x = 1$.
C. $y = -2$. D. $y = 2$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$			2		-2	$+\infty$
	$-\infty$					

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

- A. $x = 3$. B. $(1; 3)$.
C. $(2; -2)$. D. $x = 2$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		3		-2	$+\infty$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 0.

x	$-\infty$	2		$+\infty$
y'	$+$		$ $	$+$
y	-2	$+\infty$	$-\infty$	-2

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 0.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$	-3	-1		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số có điểm cực đại là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

DẠNG 2_TÌM CỰC TRỊ KHI BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$.

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Nếu đồ thị “đi lên” rồi “đi xuống” thì đây là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- ◆ Nếu đồ thị “đi xuống” rồi “đi lên” thì đây là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

A – VÍ DỤ MINH HỌA

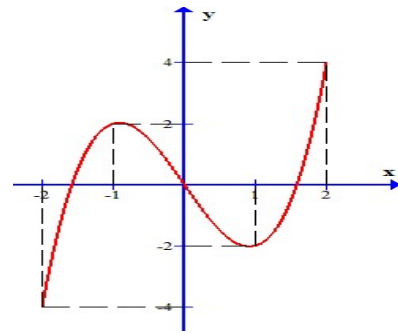
Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = -2$. B. $x = -1$.
C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.



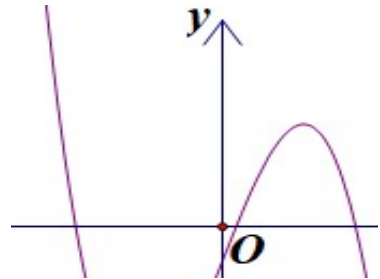
Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 3. B. 0.
C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 2 cực trị.



Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

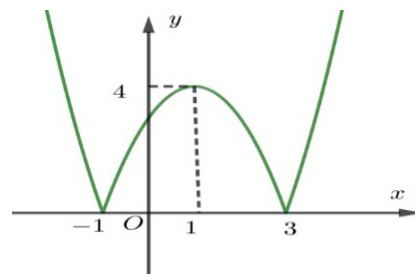
Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 3 cực trị.

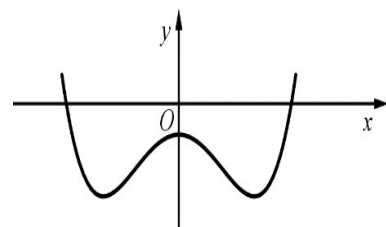


Ví dụ 4. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 0.
C. 2. D. 1.

Chọn A

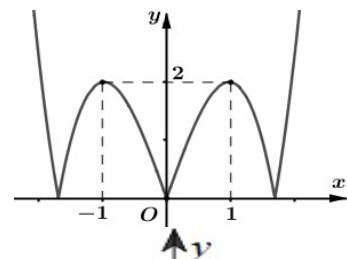
Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 3 cực trị



B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5.
C. 2. D. 3.



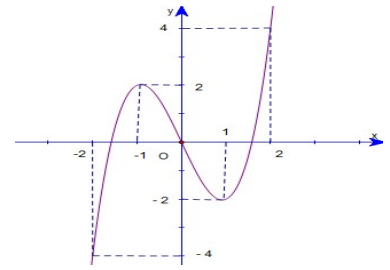
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số đó có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 3.
C. 1. D. 2.



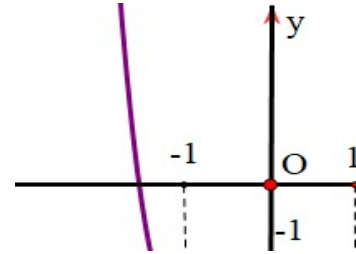
Câu 13. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = -1$. B. $x = -2$.
C. $x = 1$. D. $x = 2$.



Câu 14. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số bằng

- A. -1 . B. -2 .
C. 1 . D. 0 .



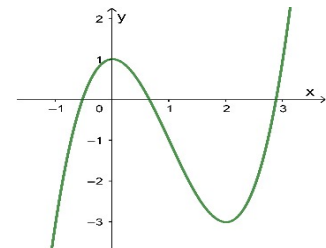
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- A. 1 . B. 2 .
C. 4 . D. 3 .



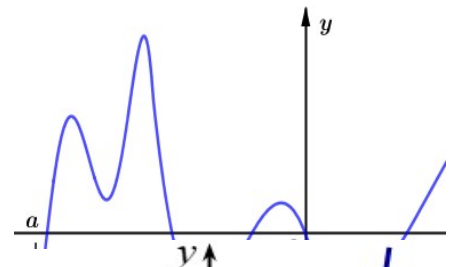
Câu 16. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. -3 . B. 0 .
C. 2 . D. 1 .



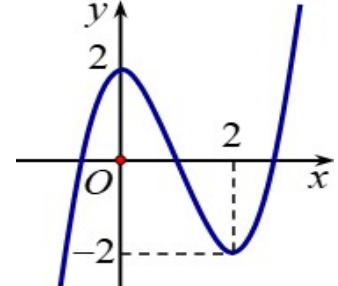
Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(a; b)$?

- A. 4 . B. 2 .
C. 7 . D. 3 .



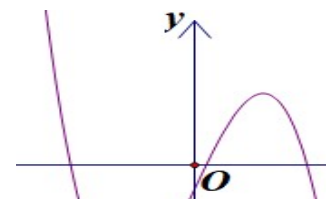
Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có ba cực trị.
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2 .
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.



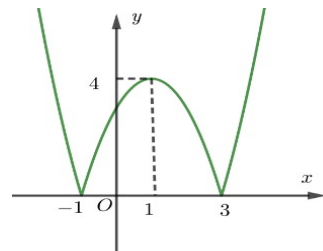
Câu 19. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3 . B. 0 .
C. 2 . D. 1 .



Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4.
C. 2. D. 1.



DẠNG 3_TÌM CỰC TRỊ ĐỀ CHO HÀM SỐ $Y = F(X)$

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Lập BBT
- ◆ Dựa vào BBT kết luận cực trị

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. 1. B. 4. C. 0. D. -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	
y'		$+$	0	$-$	0
				4	

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -2$ (là nghiệm kép)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0
y'		$-$	0	$-$	0

Suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Ví dụ 3. Hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ có bao nhiêu cực

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải**Chọn B**

$$y' = \frac{-3}{(-x+2)^2} < 0, \forall x \neq 2$$

Suy ra hàm số không có cực trị.

Ví dụ 4. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị.**A.** 3.**B.** 2.**C.** 0.**D.** 1.**Lời giải****Chọn A**

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}, \text{ các nghiệm này đều là nghiệm đơn.}$$

Vậy hàm số có 3 cực trị.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.**Câu 21.** Gọi x_1 và x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2x$. Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng?**A.** 13.**B.** 32.**C.** 40.**D.** 36.**Câu 22.** Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ đạt cực trị tại x_1 và x_2 thì tích các giá trị cực trị bằng?**A.** -302.**B.** 25.**C.** -207.**D.** -82.**Câu 23.** Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 12x + 20$ là**A.** $y_{CD} = -4$.**B.** $y_{CD} = -2$.**C.** $y_{CD} = 36$.**D.** $y_{CD} = 2$.**Câu 24.** Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ là**A.** 1.**B.** 2.**C.** 3.**D.** 0.**Câu 25.** Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?**A.** 1.**B.** 2.**C.** 3.**D.** 0.**Câu 26.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 3)^2(x + 2)^{2021}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là**A.** 5.**B.** 2.**C.** 3.**D.** 4.**Câu 27.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)^{2020}(x - 5)(x + 2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng**A.** 4.**B.** 3.**C.** 1.**D.** 2.**Câu 28.** Hàm số $y = x^4 + x^2 - 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?**A.** 3.**B.** 0.**C.** 2.**D.** 1.**Câu 29.** Hàm số $y = x^3 - 3x + 2020$ đạt cực tiểu tại**A.** $x = -1$.**B.** $x = 3$.**C.** $x = 1$.**D.** $x = 0$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x+2)^3(2x-3)$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

DẠNG 4_TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI ĐIỂM CHO TRƯỚC.

PHƯƠNG PHÁP

♦ Tìm $f'(x); f''(x)$.

♦ Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$.

♦ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = 0$.

B. $m = 3$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m - 1$.

$y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 - m - 1 = 0 \\ 1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1; y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ khi

$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + m, y'' = 6x - 6.$$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$ ta có $y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 41. Hàm số $y = 2x^3 - (4 - 2m)x^2 + (m - 5)x - 4$ đạt cực đại tại $x = 0$ thì giá trị của m là?

- A. -5. B. 5. C. -2. D. 13.

Câu 42. Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = -3$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$. B. $m = -4$. C. $m = 1$. D. $m > -\frac{1}{3}$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 4x^3 + mx^2 - 4x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = 4$. C. $m = 6$. D. $m = 1$.

Câu 45. Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ thì tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $m \in (3; 5)$. B. $m \in (-3; -1)$. C. $m \in (1; 3)$. D. $m \in (-1; 1)$.

Câu 46. Tìm giá trị thực của m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 4)x$ đạt cực đại tại $x = 1$?

- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = -1$. D. $m = -3$.

Câu 47. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 4$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = -4$.

Câu 48. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = -7$. D. $m = 5$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2x + 1$ nhận điểm $x = 1$ làm điểm cực tiểu.

- A. $\nexists m$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. Vô số m . D. $m = \frac{5}{6}$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m - 1)x^2 + m^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

- A. $m = 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \leq 1$.

DẠNG 5_TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ BẬC BA CÓ CỰC TRỊ THỎA ĐIỀU KIỆN.

PHƯƠNG PHÁP

♦ Tính $f'(x)$.

♦ Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Biện luận m để thỏa điều kiện.

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 2020$ có cực trị.

A. $m \in (-\infty; 1]$.

B. $m \in (-\infty; 1)$.

C. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 + 2x + m$.

Hàm bậc ba có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Cách hỏi hàm bậc 3 có cực trị hoặc có hai điểm cực trị, đều như nhau.

Có thể ta dùng công thức: $b^2 - 3ac$.

Có cực trị; hai cực trị: $b^2 - 3ac > 0$.

Không có cực trị $b^2 - 3ac \leq 0$.

Với a, b, c là hệ số của y .

Ví dụ 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 2017$ có cực trị.

A. $m \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$.

B. $m \in (-\infty - 2) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-2; 2)$.

D. $m \in [-2; 2]$.

Lời giải

Chọn B

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 5 \Rightarrow y' = x^2 - 2mx + 4$

Điều kiện cần và đủ của để hàm số có hai điểm cực trị là

$\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$

Hay $m \in (-\infty - 2) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 3. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

A. $y(-1) = 7$.

B. $y(-1) = 11$.

C. $y(-1) = -11$.

D. $y(-1) = -35$.

Lời giải

Chọn D

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đề bài ta có hệ

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -7 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - (a + b + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$

Vậy $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12 \Rightarrow y(-1) = -35$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

- Câu 51.** Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m^2 - 6)x$. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có cực trị.
A. 5. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 6.
- Câu 52.** Điều kiện cần và đủ của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 5$ có hai điểm cực trị là.
A. $m \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$. **B.** $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in (-2; 2)$. **D.** $m \in [-2; 2]$.
- Câu 53.** Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ không có cực trị là.
A. $m < 1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \leq 1$. **D.** $m \geq 1$.
- Câu 54.** Tìm các số thực m để hàm số $y = (m - 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị.
A. $\begin{cases} m \neq 2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$. **B.** $-3 < m < 1$. **C.** $\begin{cases} m < -3 \\ 1 < m \end{cases}$. **D.** $-2 < m < 1$.
- Câu 55.** Điều kiện cần và đủ của tham số m để hàm số $y = x^3 - x^2 + mx - 5$ có cực trị là
A. $m > \frac{1}{3}$. **B.** $m < \frac{1}{3}$. **C.** $m \leq \frac{1}{3}$. **D.** $m \geq \frac{1}{3}$.
- Câu 56.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx - 1$ không có cực trị
A. $m > 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m \leq 3$.
- Câu 57.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x + m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu
A. $m \in \{-2; 2\}$. **B.** $m < -2$ hoặc $m > 2$.
C. $-2 < m < 2$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 58.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m - 2)x + 1$ không có cực trị
A. $m \in [-6; 0)$. **B.** $m \in [0; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$. **D.** $m \in [-6; 0]$.
- Câu 59.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính tổng $S = a + b$
A. $S = 34$. **B.** $S = -14$. **C.** $S = 14$. **D.** $S = -20$.
- Câu 60.** Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là
A. $m = -3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 3$.

DẠNG 6_TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA ĐIỀU KIỆN

PHƯƠNG PHÁP

- ♦ Tính $f'(x)$.
- ♦ Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Biện luận m để thỏa điều kiện.

† Hoặc xét hệ số $a; b$.

♦ Hàm trùng phương có:

• 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$.

• 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b \geq 0$.

♦ Từ đó ta có thêm:

• Có cực đại không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

• Có cực tiểu không có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

A. 20.

B. 11.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4(2m+1)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(2m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Vậy các giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ là $m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Ví dụ 2. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có 3 điểm cực trị.

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 2(m^2 - m - 6) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$.

Do m nguyên nên $m \in \{-1;0;1;2\}$.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 - 3 + m$ có đúng một điểm cực trị.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m > 1$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

$$ab \geq 0 \Leftrightarrow -2(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1.$$

B – BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một cực trị.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 0$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

- Câu 62.** Tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là
A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(-\infty; 0]$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $[0; +\infty)$.
- Câu 63.** Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 - 10$ có ba điểm cực trị.
A. $m = 0$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 0$.
- Câu 64.** Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + (6-m)x^2 + m$ có đúng 1 cực trị.
A. 5. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 0.
- Câu 65.** Hàm số $y = x^4 - mx^2 + 1$ có ba cực trị khi và chỉ khi
A. $m < 0$. **B.** $m > 0$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m \geq 0$.
- Câu 66.** Hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ (m là tham số) có 3 điểm cực trị khi các giá trị của m là
A. $4 < m < 5$. **B.** $m < 0$. **C.** $m > 8$. **D.** $m = 1$.
- Câu 67.** Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu
A. $-\frac{3}{2} < m \leq 0$. **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $0 \leq m < 1$. **D.** $-1 < m < \frac{1}{2}$.
- Câu 68.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \frac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại
A. $m \geq 0$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m \leq 0$.
- Câu 69.** Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.
A. $m = -1$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m \geq 0$.
- Câu 70.** Xác định các hệ số a, b, c của đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ biết $A(1; 4), B(0; 3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số?
A. $a = 1; b = 0; c = 3$. **B.** $a = -\frac{1}{4}; b = 3; c = -3$.
C. $a = 1; b = 3; c = -3$. **D.** $a = -1; b = 2; c = 3$.